1 Introduction

« Il ne suffit pas de bien jouer, il suffit de jouer mieux que son adversaire. » (Siegbert Tarrasch)

Dans ce document, nous analyserons le jeu étudié dans le projet Prolog, puis nous présenterons notre approche stratégique.

2 Présentation du Jeu Prolog

Ce jeu se déroule avec deux joueurs. L'objectif est d'obtenir le score le plus élevé après plusieurs tours.

Chaque joueur choisit simultanément un nombre entier entre 1 et 5, notés respectivement A et B. Si $|A - B| = 1$, le joueur ayant choisi le nombre le plus petit obtient $A + B$ points, et l'autre joueur obtient 0. Sinon, chaque joueur reçoit les points correspondant au nombre choisi.

Par exemple :

- Si le joueur 1 choisit 4 et le joueur 2 choisit 2, le joueur 1 obtient 4 points et le joueur 2 obtient 2 points.
- Au tour suivant, si le joueur 1 choisit 4 et le joueur 2 choisit 3, le joueur 1 obtient 0 point et le joueur 2 obtient 7 points.

Les scores cumulés deviennent donc : 4 (joueur 1) contre 9 (joueur 2).

Définition d'un jeu en forme normale

Un *jeu en forme normale* à deux joueurs est défini par :

- un ensemble fini d'actions A_1 pour le joueur 1 et A_2 pour le joueur 2,
- deux fonctions de gain $u_1 : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ et $u_2 : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$.

Chaque joueur choisit une action simultanément sans connaître celle de l'autre.

Matrices de gain : On représente les fonctions de gain par des matrices lorsque chaque ensemble A_i est indexé de 1 à n. Pour notre jeu :

$$A_1 = A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

les matrices de gain des joueurs 1 et 2, notées respectivement $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$, sont définies par :

$$M^{(1)}_{ij} = u_1(i, j), \quad M^{(2)}_{ij} = u_2(i, j),$$

où i est le choix du joueur 1 et j celui du joueur 2.

Par exemple :

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 9 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'espérance de gain du joueur i est définie par l'application bilinéaire suivante :

$$E(G_i) = x_i^T M^{(i)} y,$$

où x_i et y sont les vecteurs stochastiques (stratégies) des joueurs.

3 Stratégie proposée

Nous développerons d'abord une stratégie d'équilibre statique, puis nous introduirons une stratégie adaptative pour le jeu répété.

3.1 Équilibre statique

Les joueurs cherchent uniquement à maximiser leur propre gain. Étant donné les matrices de gain, l'objectif est de déterminer un point (une stratégie) stable maximisant notre gain, sachant que l'adversaire poursuit le même objectif. L'équilibre proposé, calculé par le code en annexe(Convergence des stratégies dans un jeu répété), surpasse l'équilibre de Nash classique car :

— Il prend explicitement en compte que l'adversaire maximise également son gain.

— Il garantit l'unicité contrairement à l'équilibre de Nash, qui peut être multiple.

Ce résultat a été confirmé empiriquement.

3.2 Stratégie adaptative (jeu répété)

Nous utilisons l'historique du jeu pour identifier la stratégie de l'adversaire, supposée suivre une loi probabiliste. Chaque action adverse est modélisée comme une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli (choix ou non de l'action).

Selon une variante du Théorème Central Limite, la somme de ces probabilités dépendantes converge localement vers une loi normale dès un nombre restreint de manches ($n = 4$ empiriquement démontré). Ainsi, chaque action adverse est modélisée par une distribution normale.

Trouver la meilleure réponse

On cherche à maximiser notre espérance de gain :

$$\max_x E[G] = x^T M y$$

où :

— x est notre stratégie probabiliste,

— M est notre matrice de gain,

— y est la stratégie estimée de l'adversaire.

La résolution se fait sous contraintes :

$$\sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0.$$

La méthode de résolution consiste à sélectionner la composante de My la plus grande et à lui attribuer la probabilité 1.

Ainsi, nous adaptons notre stratégie comme suit :

$$x_{\text{nouveau}} = x_{\text{équilibre}} + \text{confiance}(x_{\text{réponse optimale}} - x_{\text{équilibre}}).$$

Nos tests empiriques ont été réalisés face à des algorithmes proposés par DeepSeek et ChatGPT (versions O4 et O3), couramment utilisés par les adversaires potentiels.